ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

Το Σύνολο των Μιγαδικών Αριθμών $\mathbb{C}$

1) Να λυθεί η εξίσωση:

$$i^{25}\cdot z-(1+3i)^2=i(1-12i)-(2-4i)z \quad \text{με λύση } z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

$$\cancel{i^{4\cdot 6}}^{1}\cdot i\cdot z-(1+3i)^2=i(1-12i)-(2-4i)z \Leftrightarrow$$

$$i\cdot z+(2-4i)z=i(1-12i)+(1+3i)^2 \Leftrightarrow$$

$$(2-3i)z=i-12i^2+1+6i+9i^2 \Leftrightarrow$$

$$(2-3i)z=4+7i \Leftrightarrow z=\frac{4+7i}{2-3i} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{(4+7i)(2+3i)}{(2-3i)(4-7i)}=\frac{-13+26i}{13}=-1+2i$$

2) Να λυθεί η εξίσωση:

$$z^2+2i\bar{z}=1 \quad \text{με λύση } z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$

$$(x+yi)^2+2i(x-yi)=1 \Leftrightarrow x^2-y^2+2y-1+(2xy+2x)i=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2y-1=0 \text{ και } 2xy+2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2y-1=0 \text{ και } x=0 \text{ ή } y=-1$$

- Για $x=0 \to -y^2+2y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow z=i$
- Για $y=-1 \to x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow z=2-i$ ή $z=-2-i$

3) Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί ν, για τους οποίους ισχύει:

$(1+i^{\nu})\cdot(1+i^{3\nu})=0$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω ο φυσικός ρ. Ο φυσικός ν παίρνει τις μορφές

$\nu=4\rho,\quad \nu=4\rho+1,\quad \nu=4\rho+2,\quad \nu=4\rho+3$

- $\nu=4\rho,\quad (1+i^{4\rho})(1+i^{3(4\rho)})=(1+i^{4\rho})(1+i^{12\rho})\neq 0$
- $\nu=4\rho+1,\quad (1+i^{4\rho+1})(1+i^{12\rho+3})=(1+i^{4\rho}\cdot i)(1+i^{12\rho}\cdot i^{3})$

  $=(1-i)\cdot(1+i)=2\neq 0$
- $\nu=4\rho+2,\quad (1+i^{4\rho+2})(1+i^{12\rho+6})=(1+i^{4\rho}\cdot i^{2})\cdot(1+i^{12\rho}\cdot i^{6})=0$
- $\nu=4\rho+3,\quad (1+i^{4\rho+3})(1+i^{12\rho+9})=(1-i)\cdot(1+i^{9})=(1-i)\cdot(1+i)=2\neq 0$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ-ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ</u>

1) • Νδο εάν: $|z+|z||+|z-|z||=2|z|$ τότε ο z πραγματικός.

• Νδο εάν: $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ τότε ο $\frac{z_1}{z_2}$ φανταστικός, $z_2\neq 0$

<u>ΛΥΣΗ</u>

- $|z+|z||+|z-|z||=2|z| \Leftrightarrow (|z+|z||+|z-|z||)^2=4|z|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+|z||^2+|z-|z||^2+2|z+|z||\cdot|z-|z||=4|z|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+|z|)(\overline{z+|z|})+(z-|z|)(\overline{z-|z|})+2|z^2-|z|^2|=4|z|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+|z|)(\bar{z}+|\bar{z}|)+(z-|z|)(\bar{z}-|\bar{z}|)+2|z^2-|z|^2|=4|z|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}+\bar{z}|z|+z|\bar{z}|+|z|\cdot|\bar{z}|+z\bar{z}-z|\bar{z}|-\bar{z}|z|+|z||\bar{z}|+2|z^2-|z|^2|=4|z|^2$

$\Leftrightarrow 2|z|^2+2|z|\cdot|\bar{z}|+2|z^2-|z|^2|=4|z|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4|z|^2+2|z^2-|z|^2|=4|z|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2|z^2-|z|^2|=0 \Leftrightarrow |z^2-|z|^2|=0 \Leftrightarrow |z|^2=z^2 \Rightarrow z\in R$

• $|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \overset{z_2\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{|z_1+z_2|}{|z_2|}=\dfrac{|z_1-z_2|}{|z_2|} \Leftrightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}+1\right|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}-1\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}+1\right|^2=\left|\dfrac{z_1}{z_2}-1\right|^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z_1}{z_2}+1\right)\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}+1\right)}=\left(\dfrac{z_1}{z_2}-1\right)\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}-1\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{z_1}{z_2}+1\right)\left(\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right)+1\right)=\left(\dfrac{z_1}{z_2}-1\right)\left(\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right)-1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{\dfrac{z_1}{z_2}\cdot\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right)}+\dfrac{z_1}{z_2}+\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right)+\cancel{1}=\cancel{\dfrac{z_1}{z_2}\cdot\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right)}-\dfrac{z_1}{z_2}-\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right)+\cancel{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{z_1}{z_2}+2\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}=-\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}$ φανταστικός

2) Εαν z είναι ρίζα της εξίσωσης: $(w+2)^\nu=w^\nu$ τότε νδο $z=-1+yi$, $y\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

z ρίζα της $(w+2)^\nu=w^\nu$

Αρα, $(z+2)^\nu=z^\nu \Leftrightarrow |z+2|^\nu=|z|^\nu \Leftrightarrow |z+2|=|z| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+2|^2=|z|^2 \Leftrightarrow (z+2)(\bar z+2)=z\bar z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(z+\bar z)=-4 \Leftrightarrow z+\bar z=-2 \Leftrightarrow \dfrac{z+\bar z}{2}=-1$

Αρα, $z=-1+yi$, $y\in\mathbb{R}$ και $Re(z)=-1$

ΕΡΓΑΣΙΑ

Εαν $|z_1|=|z_2|=1$ τοτε νδο $w=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ είναι πραγματικοσ για κάθε z_1, z_2 εν $\mathbb{C}$.

(Υποδ: $w=\bar w \Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$)

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

Έστω η ακολουθία των μιγαδικών αριθμών που ορίζεται ως εξής:

$z_0=0,\ z_1=i,\ z_2=-1+i,\quad z_\nu-z_{\nu-1}=i(z_{\nu-1}-z_{\nu-2})\ (1),\ \forall \nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$

α. Νδο $z_\nu - z_{\nu-1} = i^\nu$. (2)

β. Νδο $z_\nu = (i^\nu - 1)\frac{1-i}{2}$. (3)

γ. Νδο $z_{100}=0,\ z_{101}=i$

ΛΥΣΗ

α. $\begin{cases} \cancel{z_2}-z_1 = i(z_1-z_0) \\ z_3-\cancel{z_2} = i(\cancel{z_2-z_1}) \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ z_\nu - z_{\nu-1} = i(\cancel{z_{\nu-1}-z_{\nu-2}}) \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Πολ/ζουμε}}$ $z_\nu - z_{\nu-1} = i^{\nu-1}\cdot(z_1-\overset{0}{z_0}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_\nu - z_{\nu-1} = i^{\nu-1}\cdot i = i^\nu$

β. Στη (2) για $\nu=1,2,3,\dots,\nu$ δίνει:

$\begin{cases} \cancel{z_1}-z_0 = i \\ z_2-\cancel{z_1} = i^2 \\ \quad\vdots \\ z_\nu - \cancel{z_{\nu-1}} = i^\nu \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Προσθέτουμε}}$ $z_\nu - \overset{0}{z_0} = i+i^2+\dots+i^\nu \Rightarrow$

$\Rightarrow z_\nu = (1+i+i^2+\dots+i^\nu)-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_\nu = \dfrac{i^{\nu+1}-1}{i-1}-1 \Rightarrow z_\nu = \dfrac{i^{\nu+1}-1-i+1}{i-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_\nu = \dfrac{i(i^\nu-1)}{i-1} = i\dfrac{(i^\nu-1)(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \dfrac{(i^2+i)(i^\nu-1)}{-2} = \dfrac{1-i}{2}\cdot(i^\nu-1)$

γ. Η (3) για $\nu=100$ δίνει:

$z_{100} = (i^{100}-1)\cdot\dfrac{1-i}{2} = (i^{4\cdot 25}-1)\dfrac{1-i}{2} = (\cancel{1-1})\dfrac{1-i}{2}=0$

Η (3) για $\nu=101$ δίνει

$z_{101} = (i^{101}-1)\dfrac{1-i}{2} = (i-1)\dfrac{1-i}{2} = -\dfrac{1}{2}(i^2-2i+1) = i.$

11. Θα δείξουμε πρώτα ότι $|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$ (1) $\forall z_1,z_2\in\mathbf{C}$. Έχουμε: $|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2\leqq|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})\leqq z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+2|z_1||z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\leqq z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+2|z_1||z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2\leqq z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+2|z_1||z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\leqq 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1\bar{\bar{z}}_2\leqq 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}\leqq 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqq 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqq|z_1||z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqq|z_1\bar{z}_2|$$

Η τελευταία όμως σχέση ισχύει. Επίσης:

$$|z_1-z_2|=|z_1+(-z_2)|\leqq|z_1|+|-z_2|=|z_1|+|z_2|$$

άρα:
$$|z_1-z_2|\leqq|z_1|+|z_2| \quad (2)$$

Από (1) και (2), προκύπτει: $|z_1\pm z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$

12. $|z_1+z_2+\ldots+z_\nu|\leqq|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_\nu|$ (Α). Η (Α) δείχνεται επαγωγικά. Πράγματι:

Για ν=2 η (Α) ισχύει. Έστω ότι ισχύει για ν=κ, δηλαδή:

$$|z_1+z_2+\ldots+z_\kappa|\leqq|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_\kappa| \quad (\mathrm{I})$$

Θα δείξουμε ότι η (Α) ισχύει για ν=κ+1, δηλαδή:

$$|z_1+z_2+\ldots+z_\kappa+z_{\kappa+1}|\leqq|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_\kappa|+|z_{\kappa+1}| \quad (\mathrm{II})$$

Έχουμε: $|z_1+z_2+\ldots+z_{\kappa+1}|\leqq|z_1+z_2+\ldots+z_\kappa|+|z_{\kappa+1}|\leqq|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_{\kappa+1}|$.

ΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

1) Νδο τα σύνολα

$A=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|<|z+1|\}$ και $B=\{z\in\mathbb{C} \mid Re(z)>0\}$

είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

Θδο $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$

Έστω τυχόν $z\in A \Leftrightarrow |z-1|<|z+1| \Leftrightarrow |z-1|^2<|z+1|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-1)(\overline{z-1}) < (z+1)(\overline{z+1}) \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) < (z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -z-\bar{z} < z+\bar{z} \Leftrightarrow 2z+2\bar{z}>0 \Leftrightarrow z+\bar{z}>0$

Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε:

$(x+yi)+(x-yi)>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow Re(z)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\in B$. Έτσι, με αντίστροφες συνεπαγωγές φθάσαμε στο συμπέρασμα $z\in A \Leftrightarrow z\in B \Rightarrow A=B$.

2) Να αποδειχθούν οι παρακάτω γνωστές σχέσεις:

α. $|\bar{z}_1 w_2-\bar{z}_2 w_1|^2=(|z_1|^2+|z_2|^2)\cdot(|w_1|^2+|w_2|^2)-|z_1w_1+z_2w_2|^2$

β. $|\bar{z}_1 w_2-\bar{z}_2 w_1|^2\leq (|z_1|^2+|z_2|^2)\cdot(|w_1|^2+|w_2|^2)$.

(Η α. είναι η γνωστή ταυτότητα Lagrange και η β. είναι η ανισότητα Cauchy-Schwartz)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε: $(|z_1|^2+|z_2|^2)(|w_1|^2+|w_2|^2)-|z_1w_1+z_2w_2|^2=$

$=|z_1|^2\cdot|w_1|^2+|z_1|^2\cdot|w_2|^2+|z_2|^2\cdot|w_1|^2+|z_2|^2\cdot|w_2|^2-(z_1w_1+z_2w_2)\overline{(z_1w_1+z_2w_2)}=$

$=z_1\bar{z}_1\cdot w_1\bar{w}_1+z_1\bar{z}_1\cdot w_2\bar{w}_2+z_2\bar{z}_2\cdot w_1\bar{w}_1+z_2\bar{z}_2\cdot w_2\bar{w}_2-z_1w_1\bar{z}_1\bar{w}_1-z_1w_1\bar{z}_2\bar{w}_2-$

$-z_2w_2\bar{z}_1\bar{w}_1-z_2w_2\bar{z}_2\bar{w}_2=$

$=-z_2\bar{w}_1(\bar{z}_1w_2-\bar{z}_2w_1)+z_1\bar{w}_2(\bar{z}_1w_2-w_1\bar{z}_2)=$

$= (\bar{z}_1 w_2 - w_1 \bar{z}_2)(z_1 \bar{w}_2 - z_2 \bar{w}_1) = (\bar{z}_1 w_2 - w_1 \bar{z}_2)\cdot\overline{(\bar{z}_1 w_2 - \bar{z}_2 w_1)} =$

$= |\bar{z}_1 w_2 - w_1 \bar{z}_2|$

β. Απο την ταυτοτητα Lagrange, εχουμε:

$(|z_1|^2+|z_2|^2)(|w_1|^2+|w_2|^2) - |\bar{z}_1 w_2 - \bar{z}_2 w_1|^2 = |z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 \geq 0$

$\Rightarrow (|z_1|^2+|z_2|^2)(|w_1|^2+|w_2|^2) - |\bar{z}_1 w_2 - \bar{z}_2 w_1|^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\bar{z}_1 w_2 - \bar{z}_2 w_1| \leq (|z_1|^2+|z_2|^2)(|w_1|^2+|w_2|^2)$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

1) Δίνεται ο μιγαδικος $z = 1+2i$

Να παρασταθουν γεωμετρικά τα μετρα

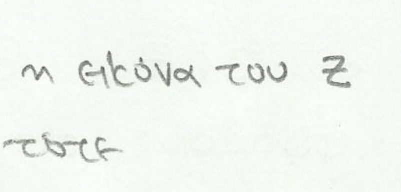
α. $|z|$ και β. $|z-2|$

ΛΥΣΗ

α. $|z| = |z-0| = |1+2i-0|$. Εαν M_1 η εικόνα του z και O η αρχή των αξόνων τοτε $|z| = d(O, M_1)$ (Δηλ. η αποσταση των εικόνων των μιγαδικών z και 0).

β. $|z-2| = |(1+2i)-2|$.

Εαν M_1 η εικονα του μιγαδικου $1+2i$ και M_2 η εικόνα του αριθμου 2 τότε $|z-2| = d(M_1, M_2)$



2) Εαν $z_1=(x-2)+(y+1)i$, x,y εν R και $z_2=1+2i$
Να βρεθεί στο μιγαδικό επιπεδο ο γεωμ. τοπος των σημειων (x,y) , οταν
α. $|z_1|=2$ και β. $z_1 z_2$ φανταστικός

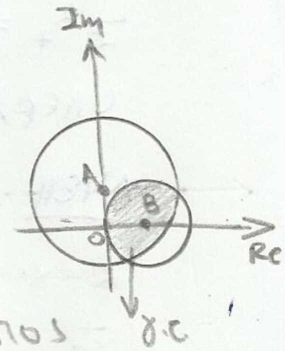
ΛΥΣΗ

α. $|z_1|=2 \Rightarrow |(x-2)+(y+1)i|=2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=4$
κυκλος κεντρου $K(2,-1)$ και ακτινας $\rho=2$

β. $z_1 z_2=[(x-2)+(y+1)i]\cdot(1+2i)=(x+2y-4)+(2x+y-3)i$
αλλά $z_1 z_2$ φανταστικός $\Rightarrow Re(z_1 z_2)=0 \Rightarrow x+2y-4=0$
ευθεια στο επιπεδο.

3) Εαν για τους μιγαδικους z, ισχυουν οι σχεσεις:
$|z-i|\le 2$ και $|z-1|\le 1$ τοτε να βρεθεί ο γ.τ. των εικονων του αριθμου z

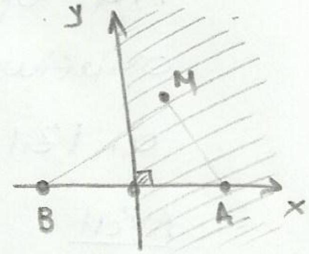
ΛΥΣΗ



Εστω A εικόνα του i και B εικόνα του 1
Εαν M εικόνα του z, τότε γεωμετρικα:
• $|z-i|\le 2$ είναι οι αποστάσεις του τυχόντος M από το A είναι μικρότερες ή ισες από 2
Αρα, ο γ.τ. αυτός είναι τα σημεία του κυκλου με κεντρο A και ακτίνα $\rho=2$ (εσωτερικα-συνοριακά)
• $|z-1|\le 1$ ομοια θα είναι κυκλος κεντρου B και ακτινας 1. Η τομή αυτών των κυκλων μας δίνει τον ζητούμενο γ.τ.

4) Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών που επαληθεύουν τη σχέση:

$|z-2|<|z+2|$



ΛΥΣΗ

$|z-2|<|z+2| \Leftrightarrow |z-(2+0i)| < |z-(-2+0i)|$

Έστω A και B εικόνες των $2+0i$ και $-2+0i$

Τότε ισοδύναμα έχουμε: $(MA)<(MB)$, M εικόνες των μιγαδικών z.

Αν φέρουμε τη μεσοκάθετη στο ευθ. τμήμα AB (δηλ. τον άξονα y), τότε ο ζητούμενος γ.τ είναι τα σημεία του ημιεπιπέδου δεξιά από τον άξονα των y.

5) Νδο ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z:
$z^2+\bar{z}^2+2\lambda(1-i)|z|^2-2i=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι η ισοσκελής υπερβολή: $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{1}=1$. (Πανεπιστήμιο Οξφόρδης)

ΛΥΣΗ

$z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$

$(x+yi)^2+(x-yi)^2+2\lambda(1-i)(x^2+y^2)-2i=0 \Leftrightarrow$

$(2(x^2-y^2)+2\lambda(x^2+y^2))+(-2\lambda(x^2+y^2)-2)i=0$

$$\begin{cases} 2(x^2-y^2)+2\lambda(x^2+y^2)=0 \\ -2\lambda(x^2-y^2)-2=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{προσθ}} \boxed{\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{1}=1}$$